Pourquoi les parties entières de la suite de multiplications par 2 donnent les chiffres « après » la virgule de l'écriture binaire ?

Le principe est le même que pour la base 10 (en faisant des multiplications par 10 jusqu'à obtenir une valeur entière) :

Exemple : 0,8125 en base 10

$0{,}8125 \times 10 = \mathbf{8},125$	La partie entière (à gauche de la virgule) est le chiffre des **dixièmes** (10^{-1})
$0{,}125 \times 10 = \mathbf{1},25$	La partie entière (à g. de la virgule) est le chiffre des **centièmes** (10^{-2})
$0{,}25 \times 10 = \mathbf{2},5$	La partie entière (à g. de la virgule) est le chiffre des **millièmes** (10^{-3})
$0{,}5 \times 10 = \mathbf{5}$	La partie entière (à g. de la virgule) est le chiffre des **dix-millièmes** (10^{-4})

On voit que l'on obtient successivement 8, 1, 2 et 5 qui sont les chiffres de la partie décimale.

En base 2, c'est la même chose avec des multiplications par 2 :

Exemple : 0,8125 en base 2

$0{,}8125 \times 2$	$=$	$\mathbf{1},625$	La partie entière (à gauche de la virgule) est le chiffre des **demis** (2^{-1})
$0{,}625 \times 2$	$=$	$\mathbf{1},25$	La partie entière (à gauche de la virgule) est le chiffre des **quarts** (2^{-2})
$0{,}25 \times 2$	$=$	$\mathbf{0},5$	La partie entière (à gauche de la virgule) est le chiffre des **huitièmes** (2^{-3})
$0{,}5 \times 2$	$=$	$\mathbf{1}$	La partie entière (à gauche de la virgule) est le chiffre des **seizièmes** (2^{-4})

Les parties entières successives correspondent à l'écriture binaire de 0,8125 : $(0{,}1101)_2$.

Pourquoi ?

En base 10 :

$$0{,}8125 = 0 + \frac{8}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{10000} = 0 + \frac{8}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4}$$

$$0{,}8125 \times 10 = \mathbf{8} + \underbrace{\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}}_{0{,}125}$$

$$0{,}125 \times 10 = \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}\right) \times 10 = \mathbf{1} + \underbrace{\frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}}_{0{,}25}$$

$$0{,}25 \times 10 = \left(\frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}\right) \times 10 = \mathbf{2} + \underbrace{\frac{5}{10}}_{0{,}5}$$

$$0{,}5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = \mathbf{5}$$

En base 2 :

$$(0{,}1101)_2 = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

$$(0{,}1101)_2 \times 2 = \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) \times 2 = \mathbf{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3}}_{(0{,}101)_2}$$

$$(0{,}101)_2 \times 2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \times 2 = \mathbf{1} + \underbrace{\frac{0}{2} + \frac{1}{2^2}}_{(0{,}01)_2}$$

$$(0{,}01)_2 \times 2 = \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \times 2 = \mathbf{0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{(0{,}1)_2}$$

$$(0{,}1)_2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2 = \mathbf{1}$$