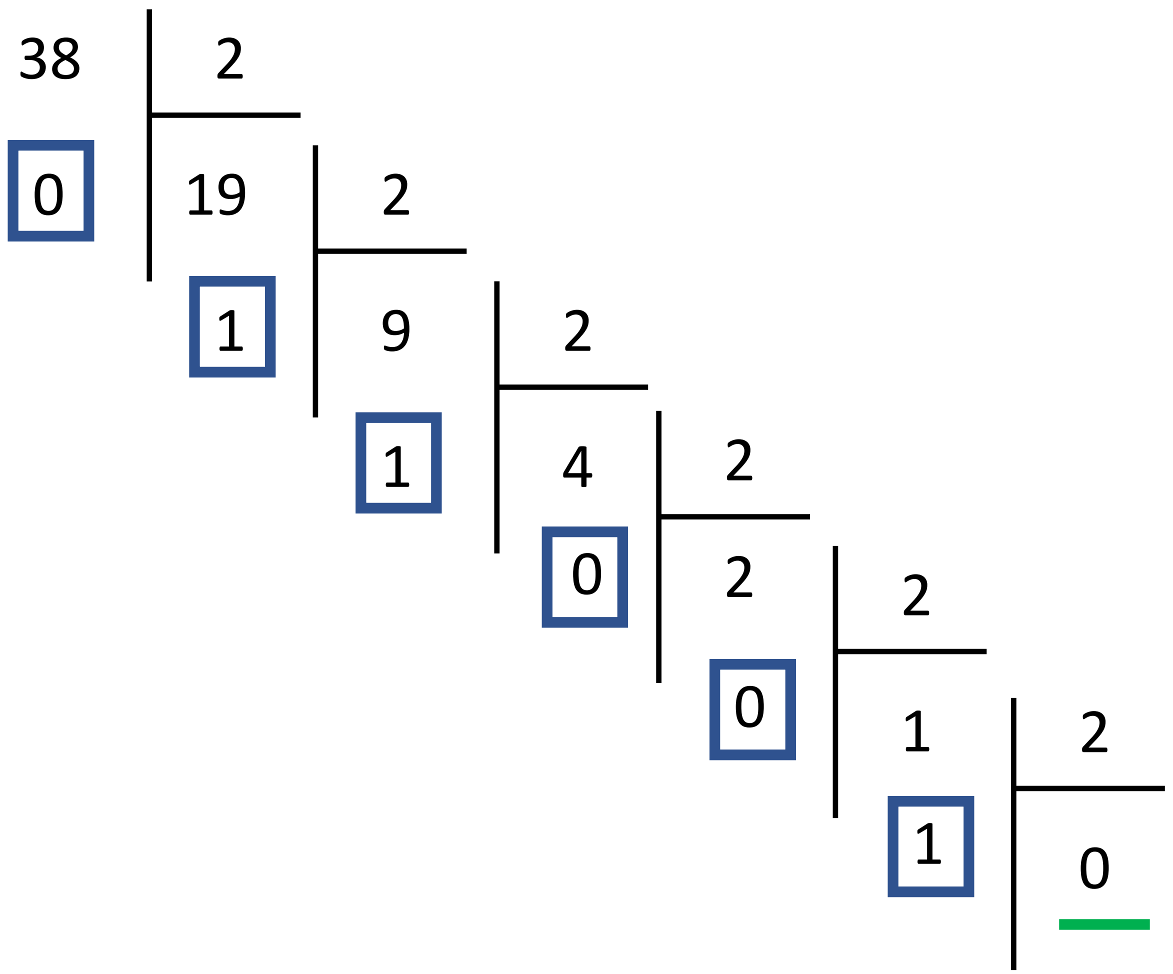
Chapitre 1

Représentation des entiers relatifs

1ère NSI – Séquence 7

Codage des entiers naturels (rappels)

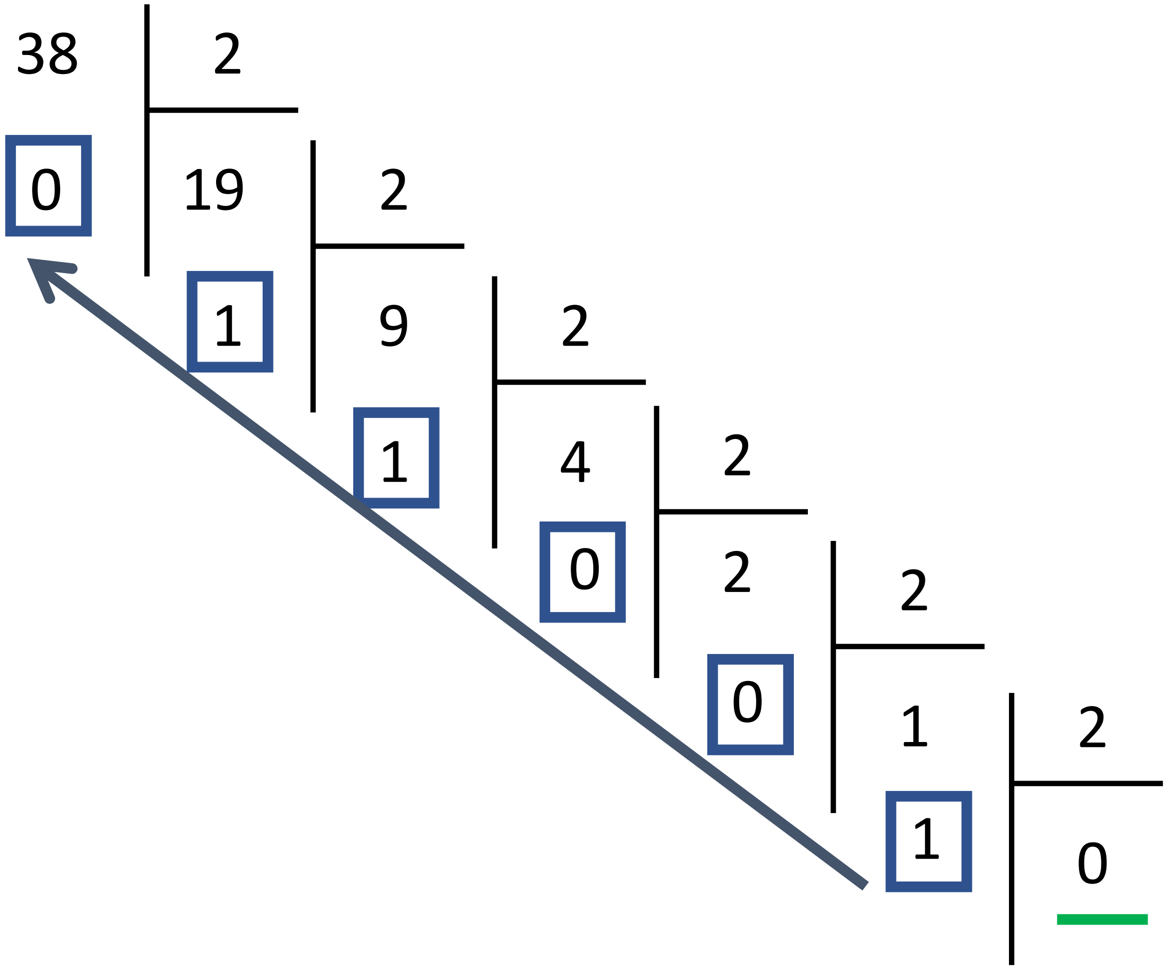
- Divisions successives par 2
- Exemple : 38 en binaire



Codage des entiers naturels (rappels)

- Divisions successives par 2
- Exemple : 38 en binaire

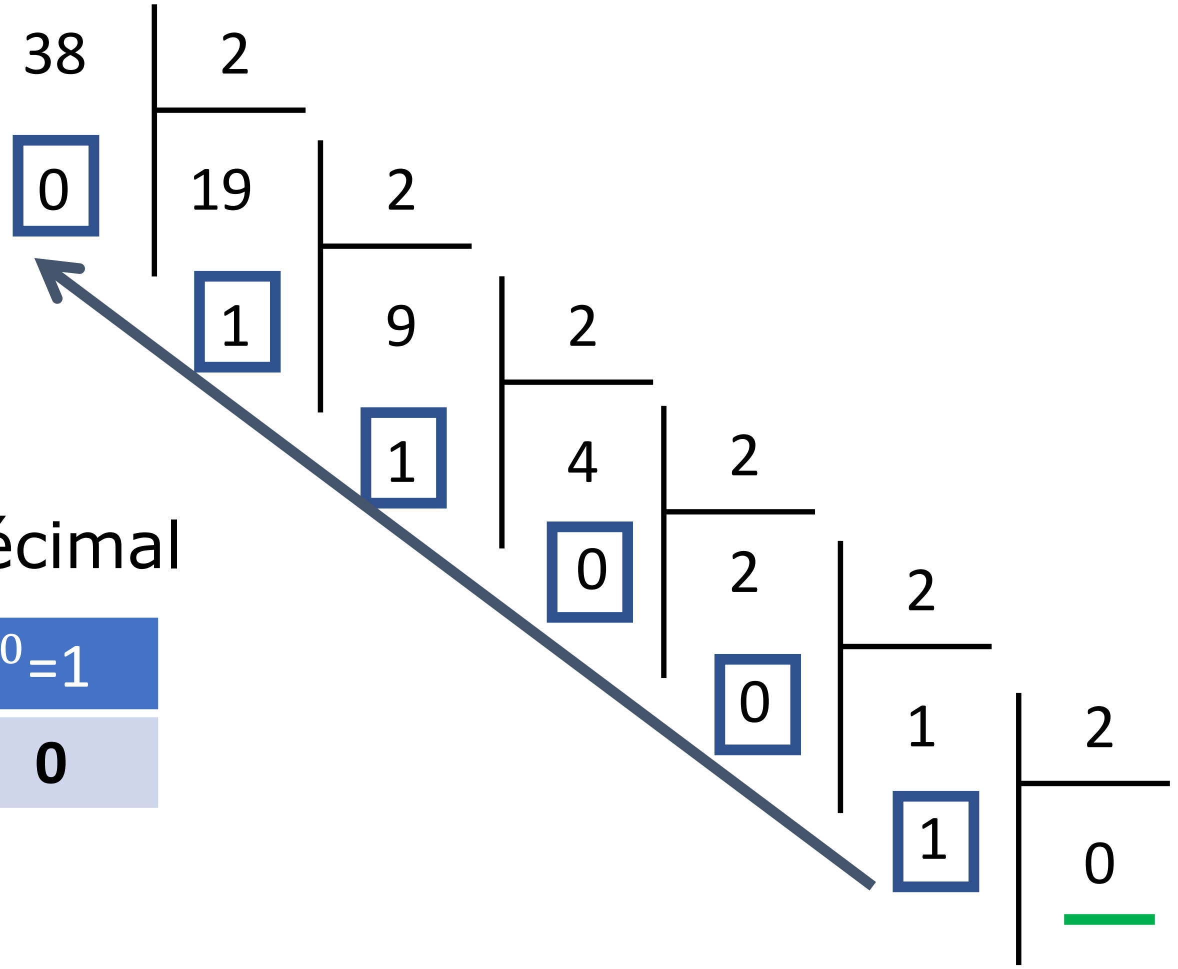
38 = 100110



Codage des entiers naturels (rappels)

- Divisions successives par 2
- Exemple : 38 en binaire

$38 = 100110$



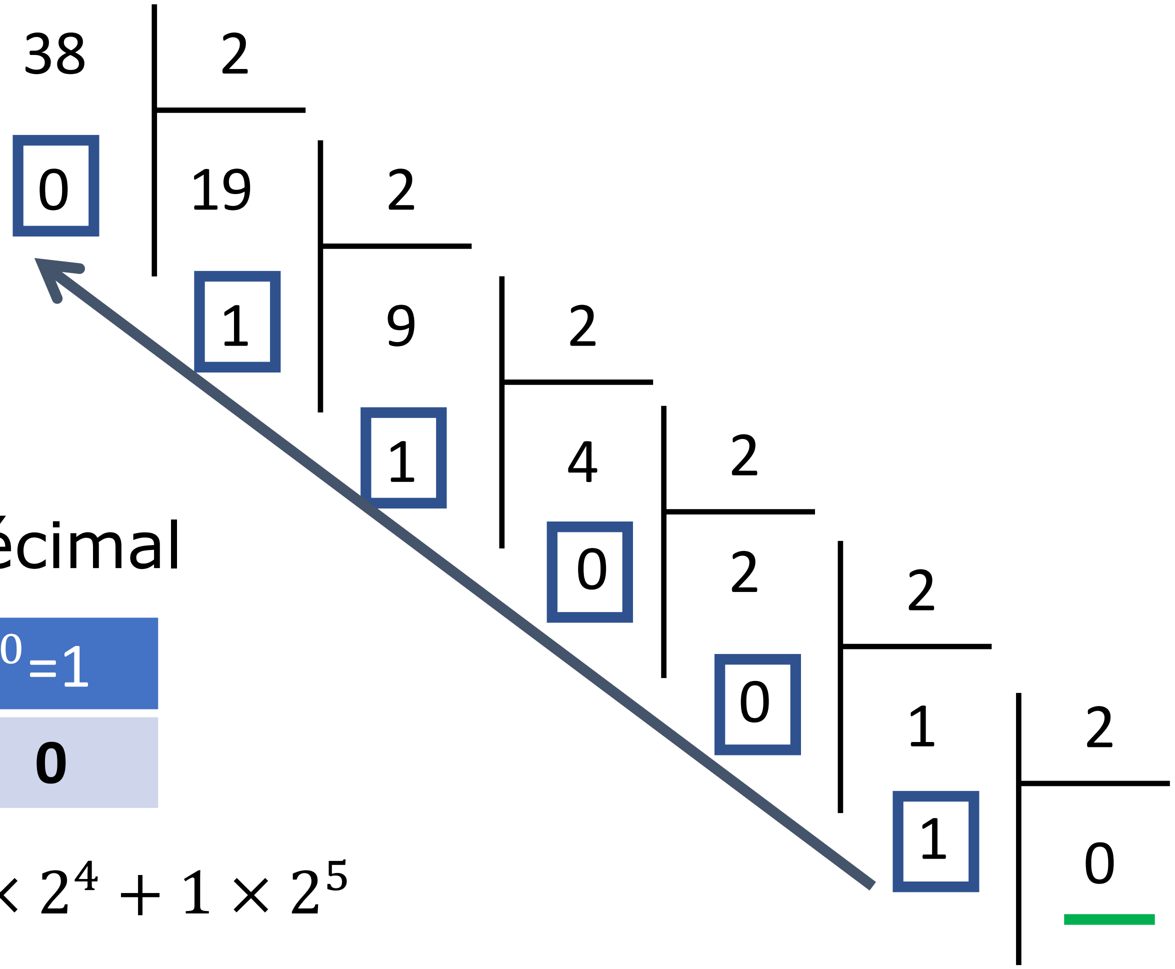
- Dans l'autre sens : 100110 en décimal

2^5=32	2^4=16	2^3=8	2^2=4	2^1=2	2^0=1
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

Codage des entiers naturels (rappels)

- Divisions successives par 2
- Exemple : 38 en binaire

38 = 100110



- Dans l’autre sens : 100110 en décimal

2^5=32	2^4=16	2^3=8	2^2=4	2^1=2	2^0=1
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

$$0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$$
$$= 2 + 4 + 32 = 38$$

Codage des entiers naturels (rappels)

- Addition binaire de deux entiers positifs :
  - $(1)_2 + (1)_2 = (10)_2$
  - Calcul de $(101)_2 + (1101)_2$:

$$
\begin{array}{rrl}
 & \color{red}{1\ \ 1} & \leftarrow \text{retenues} \\
 & 101 & \\
+ & 1101 & \\
\hline
 & 10010 & \leftarrow \text{résultat}
\end{array}
$$

Et pour les entiers relatifs ?

- On veut coder les entiers négatifs → comment ?

Et pour les entiers relatifs ?

- On veut coder les entiers négatifs → comment ?
- Sur 3 bits, on peut coder 8 valeurs ($2^3 = 8$).

000	001	010	011	100	101	110	111

Et pour les entiers relatifs ?

- On veut coder les entiers négatifs → comment ?
- Sur 3 bits, on peut coder 8 valeurs ($2^3 = 8$).

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111

- Idée : 4 valeurs → entiers positifs
  4 valeurs → entiers (strictement) négatifs
- A quel entier (relatif) correspond chaque valeur binaire ?

Et pour les entiers relatifs ?

- **1ère idée** : utiliser le premier bit pour le signe et le reste pour la valeur absolue de l'entier

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
+0	+1	+2	+3				

- Et la suite ?

Et pour les entiers relatifs ?

- **1$^{\text{ère}}$ idée** : utiliser le premier bit pour le signe et le reste pour la valeur absolue de l'entier

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
+0	+1	+2	+3	-0	-1	-2	-3

Et pour les entiers relatifs ?

- **1ère idée** : utiliser le premier bit pour le signe et le reste pour la valeur absolue de l'entier

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
+0	+1	+2	+3	-0	-1	-2	-3

- 1er problème (mineur) : il existe deux zéros (+0 et -0)

Et pour les entiers relatifs ?

- **1ère idée** : utiliser le premier bit pour le signe et le reste pour la valeur absolue de l'entier

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
+0	+1	+2	+3	-0	-1	-2	-3

- 1er problème (mineur) : il existe deux zéros (+0 et -0)
- 2ème problème (majeur) : l'algorithme d'addition ne marche plus

Et pour les entiers relatifs ?

- **1ère idée** : utiliser le premier bit pour le signe et le reste pour la valeur absolue de l'entier

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
+0	+1	+2	+3	-0	-1	-2	-3

- 1er problème (mineur) : il existe deux zéros (+0 et -0)
- 2ème problème (majeur) : l'algorithme d'addition ne marche plus

Posons l'addition 2 + (-1) :

$$\begin{array}{rl} 010 & \rightarrow 2 \\ +\ 101 & \rightarrow -1 \\ \hline \mathbf{111} & \rightarrow -\mathbf{3} \end{array}$$

Et pour les entiers relatifs ?

- **1ère idée** : utiliser le premier bit pour le signe et le reste pour la valeur absolue de l'entier

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
+0	+1	+2	+3	-0	-1	-2	-3

- 1er problème (mineur) : il existe deux zéros (+0 et -0)
- 2ème problème (majeur) : l'algorithme d'addition ne marche plus

Posons l'addition 2 + (-1) :

$$\begin{array}{rl} 010 & \rightarrow 2 \\ +\ 101 & \rightarrow -1 \\ \hline \mathbf{111} & \rightarrow -\mathbf{3} \end{array}$$

→ **MAUVAISE METHODE**

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	?	?	?	?

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	?	?	?	?

- Comment coder -3 ?
  - 1ère étape : on passe en positif : 3

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	?	?	?	?

- Comment coder -3 ?
  - 1ère étape : on passe en positif : 3
  - 2ème étape : on code 3 en binaire : 011

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	?	?	?	?

- Comment coder -3 ?
  - 1ère étape : on passe en positif : 3
  - 2ème étape : on code 3 en binaire : 011
  - 3ème étape : on inverse les bits : 100 (les 1 deviennent 0 et inversement)

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	?	?	?	?

- Comment coder -3 ?
  - 1ère étape : on passe en positif : 3
  - 2ème étape : on code 3 en binaire : 011
  - 3ème étape : on inverse les bits : 100 (les 1 deviennent 0 et inversement)
  - 4ème étape : on ajoute 1 : 101

$$\begin{array}{r} 100 \\ +\quad 1 \\ \hline \mathbf{101} \end{array}$$

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	?	-3	?	?

- Comment coder -3 ?
  - 1ère étape : on passe en positif : 3
  - 2ème étape : on code 3 en binaire : 011
  - 3ème étape : on inverse les bits : 100 (les 1 deviennent 0 et inversement)
  - 4ème étape : on ajoute 1 : 101
  - Conclusion : -3 se code 101

$$\begin{array}{r} 100 \\ +\quad 1 \\ \hline \mathbf{101} \end{array}$$

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

- Comment coder -3 ?
  - 1ère étape : on passe en positif : 3
  - 2ème étape : on code 3 en binaire : 011
  - 3ème étape : on inverse les bits : 100 (les 1 deviennent 0 et inversement)
  - 4ème étape : on ajoute 1 : 101
  - Conclusion : -3 se code 101
- On procède de même pour les autres valeurs

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs | Entiers négatifs

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

- Il n'y a plus les problèmes de la 1ère idée !
  - On n'a qu'un seul zéro !
  - L'algorithme d'addition fonctionne toujours :

$$\begin{array}{r} 010 \\ +\ 101 \\ \hline \mathbf{111} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 2 \\ \rightarrow -3 \\ \rightarrow - \mathbf{-1} \end{array}$$

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

- Il n'y a plus les problèmes de la 1ère idée !
  - On n'a qu'un seul zéro !
  - L'algorithme d'addition fonctionne toujours :

$$\begin{array}{rl} 010 & \longrightarrow 3 \\ +\;\; 101 & \longrightarrow -4 \\ \hline \mathbf{111} & \longrightarrow -\;\mathbf{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 11 & \leftarrow \text{retenues} \\ 010 & \longrightarrow 2 \\ +\;\; 111 & \longrightarrow -1 \\ \hline \mathbf{1001} & \longrightarrow \end{array}$$

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2

Entiers positifs | Entiers négatifs

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

- Il n'y a plus les problèmes de la 1ère idée !
  - On n'a qu'un seul zéro !
  - L'algorithme d'addition fonctionne toujours :

$$\begin{array}{rrl} & 010 & \longrightarrow 3 \\ + & 101 & \longrightarrow -4 \\ \hline & \mathbf{111} & \longrightarrow - \mathbf{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} & 11 & \leftarrow \text{retenues} \\ & 010 & \longrightarrow 2 \\ + & 111 & \longrightarrow -1 \\ \hline (1) & \mathbf{001} & \longrightarrow 1 \text{ sur 3 bits} \end{array}$$

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2 → **Méthode utilisée !**
- Il est indispensable de préciser sur combien de bits on code les entiers ! (8 bits, 16 bits, 32 bits, 64 bits)
- Le bit de poids fort indique toujours le signe de l'entier : 0 pour un entier positif et 1 pour un entier négatif

Entiers positifs				Entiers négatifs			
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

Et pour les entiers relatifs ?

- **A vous de jouer !**
- Quelle est la représentation de -6 en complément à deux sur 4 bits ?
- Quelle est la représentation de -25 en complément à deux sur 8 bits ?

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2
- Quels entiers peut-on coder ?
  - Sur 3 bits : 8 entiers
    → 4 entiers positifs : de 0 à 3
    → 4 entiers strictement négatifs : de -4 à -1
  - Sur 8 bits ?

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2
- Quels entiers peut-on coder ?
  - Sur 3 bits : 8 entiers
    → 4 entiers positifs : de 0 à 3
    → 4 entiers strictement négatifs : de -4 à -1
  - Sur 8 bits ? 256 entiers
    → 128 entiers positifs : de 0 à 127
    → 128 entiers négatifs : de -128 à -1

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2
- Quels entiers peut-on coder ?
  - Sur 3 bits : 8 entiers
    → 4 entiers positifs : de 0 à 3
    → 4 entiers strictement négatifs : de -4 à -1
  - Sur 8 bits ? 256 entiers
    → 128 entiers positifs : de 0 à 127
    → 128 entiers négatifs : de -128 à -1
- Plage d'entiers codés ?
  - Sur 8 bits : de -128 à 127 = de -2^{8-1} à $2^{8-1} - 1$

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2
- Quels entiers peut-on coder ?
  - Sur 3 bits : 8 entiers
    → 4 entiers positifs : de 0 à 3
    → 4 entiers strictement négatifs : de -4 à -1
  - Sur 8 bits ? 256 entiers
    → 128 entiers positifs : de 0 à 127
    → 128 entiers négatifs : de -128 à -1
- Plage d'entiers codés ?
  - Sur 8 bits : de -128 à 127 = de -2^{8-1} à $2^{8-1} - 1$
  - Sur n bits : de -2^{n-1} à $2^{n-1} - 1$

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2
- Au fait, comment ça fonctionne dans l’autre sens ?
  Quel est l’entier représenté par 10001011 en complément à deux sur 8 bits ?

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2
- Au fait, comment ça fonctionne dans l'autre sens ?
  Quel est l'entier représenté par 10001011 en complément à deux sur 8 bits ?
  - Le bit de poids fort est un « 1 » (10001011) → il s'agit d'un entier négatif
  - On inverse tous les bits : 01110100
  - On ajoute 1 : 01110101
  - On passe en décimal : $1 + 4 + 16 + 32 + 64 = 117$
  - Conclusion : -117 est représenté par 10001011 en complément à deux sur 8 bits.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	1	1	0	1	0	1

Et pour les entiers relatifs ?

- **2ème idée** : le complément à 2
- Au fait, comment ça fonctionne dans l'autre sens ?
  Quel est l'entier représenté par 10001011 en complément à deux sur 8 bits ?
  - Le bit de poids fort est un « 1 » (10001011) → il s'agit d'un entier négatif
  - On inverse tous les bits : 01110100
  - On ajoute 1 : 01110101
  - On passe en décimal : $1 + 4 + 16 + 32 + 64 = 117$
  - Conclusion : -117 est représenté par 10001011 en complément à deux sur 8 bits.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	1	1	0	1	0	1

- Et si le bit de poids fort est un 0 ?
  → on peut tout de suite calculer sa valeur décimale

Et pour les entiers relatifs ?

- **A vous de jouer !**
- Quel est l’entier représenté par 11101100 en complément à deux sur 8 bits ?

Conclusion

- Pour coder les entiers relatifs on utilise la représentation dite « en complément à deux »
- Il est nécessaire de savoir combien de bits sont utilisés
- Sur 8 bits (par ex.) on peut coder 256 entiers : la moitié seront des entiers positifs (de 0 à 127) et l'autre moitié des entiers (strictement) négatifs (de -128 à -1)
- Pour déterminer la représentation en complément à deux d'un entier (négatif):
  - On passe en positif
  - On convertit le résultat en binaire
  - On inverse tous les bits
  - On ajoute 1